MATHEMATIQUES II

PROBLÈME

DURÉE : 4 heures

Option "Sciences Physiques"

On considère l'équation différentielle

(1) $$xy' - y^2 + x = 0$$

où y est une fonction réelle de la variable réelle x et y' sa dérivée par rapport à x.

I

1° Montrer que l'équation (1) admet une solution et une seule qui soit développable en série entière au voisinage de l'origine; en notant $Y(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ cette solution, montrer que $0 < |a_n| \leqslant \frac{1}{n} \quad \forall n \geqslant 1$.

2° *a.* Former l'équation différentielle (2) déduite de l'équation (1) par le changement de fonction inconnue défini par $y(x) = -x \frac{u'(x)}{u(x)}$. Ce changement de fonction définit-il une bijection entre les solutions de l'équation (1) et celles de l'équation (2)?

b. Déterminer les solutions de l'équation (2) développables en série entière au voisinage de l'origine.

c. Soit U celle de ces solutions qui vérifie $U(0) = 1$, et soit y une solution quelconque de l'équation (1). Montrer que la fonction $t = yU$ est solution de l'équation différentielle

(3) $$x\,U(x)t' - xU'(x)t - t^2 + x\,U(x)^2 = 0\,.$$

Montrer que l'équation (3) admet au plus une solution développable en série entière au voisinage de l'origine.

d. En déduire que $Y(x)\,U(x) = -xU'(x)$ et que

$$Y(x) = -\frac{\sum_{n \geq 1} \frac{n x^n}{(n!)^2}}{\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}}$$

3° *a.* Former l'équation différentielle (4) déduite de l'équation (1) par le changement de fonction inconnue défini par $y(x) = Y(x) + \frac{1}{z(x)\,U(x)^2}$, z étant la nouvelle fonction inconnue. Montrer que l'équation (4) peut se mettre sous la forme

(4') $$z' = -\frac{1}{x} + g(x)$$

où g est une fonction continue sur un voisinage de l'origine.

b. Montrer que les courbes intégrales de l'équation (1) ne peuvent avoir de point commun en dehors de la droite d'équation $x = 0$. Déduire alors de *a.* que toutes les solutions de l'équation (1) tendent vers 0 lorsque $x \to 0$.

c. Préciser l'allure des courbes intégrales de l'équation (1) au voisinage de l'origine.

II

1° *a.* Déterminer l'ensemble P_1 des points où les courbes intégrales de l'équation (1) ont une tangente horizontale et l'ensemble P_2 des points où ces courbes ont un point d'inflexion.

b. Indiquer suivant les régions du plan le signe de la dérivée $y'(x)$ et de la dérivée seconde $y''(x)$ d'une solution y de l'équation (1).

c. Déterminer en tout point M de P_2 la position relative de P_2 et de la courbe intégrale de l'équation (1) qui passe par M.

E.N.S. FONTENAY & SAINT-CLOUD 1983

23

2° On se borne désormais à l'étude des solutions de l'équation (1) pour des valeurs positives ou nulles de la variable x.

a. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$ et soit y une solution de l'équation (1) définie pour tout $x \geqslant x_0$ et vérifiant $y(x_0) < 0$ et $y''(x_0) > 0$. Montrer que pour tout $x \geqslant x_0$, on a $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$ et $y''(x) > 0$.
En supposant que $B = \{ x > x_0 ; y''(x) = 0 \}$ est non vide et en notant β la borne inférieure de B, on pourra montrer que $\beta \in B$ et chercher une contradiction avec 1° *c.*

b. Avec les mêmes hypothèses que *a.* déterminer lorsque $x \to + \infty$ la limite de $y'(x)$ et un équivalent de $y(x)$.

c. Peut-on appliquer *a.* et *b.* à la fonction Y ?

3° *a.* Si U est la fonction définie en I. 2° *c.*, montrer que $\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x\,U(x)^2}$ est une intégrale convergente pour tout $A > 0$. En déduire que toute solution z de l'équation (4) a une limite quand $x \to + \infty$. L'intégrale est-elle encore convergente pour $A = 0$?

b. On note z_α la solution de l'équation (4) qui tend vers α lorsque $x \to + \infty$ et y_α la solution associée de l'équation (1). Étudier la variation de la fonction z_α et en déduire que la fonction y_α est définie pour tout x positif si et seulement si $\alpha \geqslant 0$. Donner pour $\alpha \neq 0$ un équivalent de y_α au voisinage de l'infini.

4° *a.* Montrer que, pour x positif voisin de 0, la courbe représentative de y_α est au-dessus de P_1.

b. Soit $C = \{ x > 0 ; y'_\alpha(x) = 0$ ou $y''_\alpha(x) = 0 \}$. Montrer que si C est vide, $\alpha = 0$. Montrer que si C est non vide, il contient sa borne inférieure γ.

c. On suppose $\alpha \neq 0$ et $y'_\alpha(\gamma) = 0$. Montrer qu'il existe un point $\xi > \gamma$ tel que $y_\alpha(\xi) = 0$ et montrer que pour tout $x > \xi$, on a $y_\alpha(x) < 0$, $y'_\alpha(x) < 0$ et $y''_\alpha(x) > 0$.
En déduire que α est positif.

d. On suppose $\alpha \neq 0$ et $y''_\alpha(\gamma) = 0$. Montrer, en s'inspirant de la méthode proposée en 2° *a.*, que y_α ne peut pas être défini pour tout $x > 0$ et en déduire que α est négatif. Préciser l'allure du graphe de $y_\alpha(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

5° *a.* Montrer que la suite de fonctions $h_n = y_{1/n}$ est une suite croissante qui converge simplement vers y_0. Montrer que la suite de fonctions $k_n = y_{-1/n}$ converge aussi vers y_0. Montrer que pour tout x, la suite $k_n(x)$ est monotone à partir d'un certain rang.

b. Déduire de l'étude des suites h_n et k_n que, pour tout x positif, on a $y_0(x) + Y(x) > 0$, $y'_0(x) > 0$ et $y''_0(x) < 0$.

c. Quelle est la limite de $\frac{Y(x)}{y_0(x)}$ lorsque $x \to + \infty$?

6° Rassembler sur un graphique les résultats obtenus.